MATHEMATIKER

Leben und Leistungen der großen

Mathematiker von Zeno bis Poincaré —von

E.T. BELL

PUBLISHED BY SIMON AND SCHUSTER, INC.

ROCKEFELLER CENTER

630 FIFTH AVENUE

NEW YORK 20, N.Y.

MANUUFACTURED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

FIRST PAPERBACK PRINTING —1961

Der Kopernikus der Geometrie

Lobatschewsky (1793 – 1856)

Der kleine Beitrag der Witwe. Kasan. Berufener Professor und Spion. Universelles Können. Lobatschewsky als Administrator. Vernunft und Weihrauch bekämpfen die Cholera. Russische Dankbarkeit. Erniedrigt in seiner Glanzzeit. Blind wie Milton, Lobatschewsky diktiert sein Meisterwerk. Sein Vorstoß über Euklid hinaus. Nicht-Euklidische Geometrie. Ein Kopernikus des Intellekts.

KAPITEL SECHZEHN

Der Kopernikus der Geometrie

Lobatschewsky

Lobatschewskys Theorie war seinen Zeitgenossen unverständlich, da sie einem Axiom zu widersprechen schien, dessen Notwendigkeit nur auf einem Vorurteil basiert, das seit Tausend Jahren heilig war. – DIE HERAUSGEBER VON LOBATSCHEWSKY ARBEITEN

ANGENOMMEN DASS DIE ALLGEMEIN ANERKANNTE BEURTEILUNG der Tragweite, dessen was Kopernikus tat, richtig ist, müssen wir zugeben, dass es entweder das höchste Lob ist oder die heftigste menschenmögliche Verdammung, einen anderen den "Kopernikus" von irgend etwas zu nennen. Wenn wir verstehen was Lobatschewsky mit seiner Schöpfung der nicht-Euklidischen Geometrie tat, und ihre Bedeutung für das menschliche Denken ermessen, von dem die Mathematik nur ein sehr kleiner Teil ist, dann werden wir vielleicht Clifford (1845 – 1879) zustimmen, der selbst ein großer Geometer und weit mehr als ein „bloßer Mathematiker" war, seinem Helden nicht zu viel des Lobs angedeihen ließ, als er Lobatschewsky den „Kopernikus der Geometrie" nannte.

Nikolas Iwanowitsch Lobatschewsky, der zweite Sohn eines unbedeutenden Regierungsvertreters, wurde am 2. November 1793 im Bezirk Makarjew geboren, Regierungsbezirk Nischni Nowgorod, Russland. Sein Vater starb als Nikolas sieben war, er hinterließ seiner Witwe, Praskovia Ivanovna, die Aufsicht über drei junge Söhne. Da das Gehalt des Vaters kaum ausgereicht hatte um die Familie am Leben zu halten während er noch lebte, befand sich die Witwe in äußerster Armut. Sie zog um nach Kasan, wo sie ihre Jungs so gut auf die Schule vorbereitete wie sie konnte, und die Genugtuung erlebte, dass sie alle angenommen wurden, einer nach dem anderen, als kostenfreie Schüler am Gymnasium. Nikolas wurde 1802 zugelassen, im Alter von acht. Sein Fortschritt war in Mathematik und den Klassikern außerordentlich zügig. Im Alter von vierzehn war er bereit für die Universität. 1807 ging er an die Universität von Kasan (gegründet 1805), wo er die nächsten vierzig Jahre als Student, Assistenzprofessor, Professor und schließlich als Rektor verbringen sollte.

In der Hoffnung, Kasan schließlich in den Rang einer europäischen Universität zu erheben, hatte die Obrigkeit verschiedene Professoren aus Deutschland hergebracht. Unter ihnen war der Astronom Littrow, der später Direktor des Observatoriums in Wien wurde und den Abel als eine seiner Entschuldigungen aufführte, etwas „vom Süden“ gesehen zu haben. Die deutschen Professoren erkannten rasch Lobatschewskys Genie und ermutigten ihn so oft es ging.

1811, im Alter von achtzehn, erhielt Lobatschewsky seinen Magisterabschluss nach einem kurzen Gerangel mit den Obrigkeiten, deren Zorn er sich durch seinen jugendlichen Übermut eingehandelt hatte. Seine deutschen Freunde an der Fakultät ergriffen Partei für ihn und er bekam seinen Abschluss mit Auszeichnung. Zu dieser Zeit war sein älterer Bruder Alexis verantwortlich für die Mathematik-Grundkurse zur Ausbildung niederer Regierungsangestellter, und als Alexis sich zeitweise krankschreiben ließ, trat Nikolas an seine Stelle als Ersatz. Zwei Jahre später, im Alter von einundzwanzig, wurde Lobatschewsky eine Ernennung als “Außerordentlicher Professor” zur Probe, oder, wie wir in Amerika sagen, als Assistenzprofessor.

Lobatschewskys Beförderung zum ordentlichen Professor erfolgte 1816 im ungewöhnlich jungen Alter von dreiundzwanzig. Seine Aufgaben waren hart. Zusätzlich zu seiner mathematischen Arbeit wurden ihm Kurse in Astronomie und Physik aufgelastet, erstere um einen Kollegen in Abwesenheit zu ersetzen. Die feine Ausgewogenheit, mit der er seine schwere Last trug, machte ihn zu einem offenkundigen Kandidaten für noch mehr Arbeit nach der Theorie, dass ein Mann, der viel tun kann, fähig ist mehr zu tun, und Lobatschewsky sah sich zeitgleich als Universitätsbibliothekar und als Kurator des chaotisch ungeordneten Universitätsmuseums.

Studenten sind häufig ein widerspenstiger Haufen bevor sie das Leben lehrt, dass ein großspuriger Geist einem im unbarmherzigen Geschäft des Erwerbslebens nichts bringt. Unter Lobatschewskys unzähligen Aufgaben zwischen 1819 bis zum Tode des Zaren Alexander 1825 war die der Aufsicht aller Studenten in Kasan, von den Grundschulen bis zu den Männern in weiterbildenden Kursen an der Universität. Die Aufsicht bestand in erster Linie über die politische Meinung seiner Schützlinge. Die Schwierigkeiten einer derart undankbaren Arbeit kann man sich leicht vorstellen. Dass es Lobatschewsky hinbekam, Tag für Tag und Jahr für Jahr seine Berichte an seine argwöhnische Vorgesetzten zu senden, ohne auch nur einmal wegen nachlässiger Spionage vor sie zitiert zu werden, und ohne den ehrlichen Respekt und die Zuneigung seiner Studenten zu verlieren, sagt mehr über seine administrativen Fähigkeiten als all die protzigen Orden und Medaillen mit dem die dankbare Regierung ihn überschüttete und mit denen er sich bei staatlichen Anlässen begeistert schmückte.

Die Sammlungen im Universitätsmuseum waren allem Anschein nach mit einer Heugabel herumgeworfen worden. Eine ähnliche Unordnung machte die umfangreiche Bibliothek praktisch unbrauchbar. Lobatschewsky wurde angeordnet dieses Durcheinander aufzuräumen. In Anerkennung seiner Meldedienste beförderte ihn die Obrigkeit zum Dekan der mathematischen und physikalischen Fakultät, unterließ es jedoch ihn mit irgendwelchen Mitteln auszustatten um Hilfe anzuheuern und die Bibliothek und das Museum wieder in Ordnung zu bringen. Lobatschewsky machte die Arbeit selbst, katalogisierte, entstaubte und inspizierte, oder schwang den Wischlappen wenn nötig.

Mit dem Tod Alexanders 1825 wendeten sich die Dinge zum Guten. Der speziell verantwortliche Beamte für den niederträchtigen Umgang mit der Universität von Kasan wurde hinausgeworfen, weil er selbst für einen Regierungsposten zu korrupt war, und sein Nachfolger ernannte einen professionellen Kurator um Lobatschewsky von seinen endlosen Tätigkeiten zu entlasten, Bücher zu katalogisieren, mineralische Proben zu entstauben, und ausgestopfte Vögel zu bestimmen. Da er politische und moralische Hilfe bei seiner Arbeit an der Universität brauchte, unternahm der neue Kurator einige Winkelzüge auf eigene Rechnung und sicherte Lobatschewskys Ernennung zum Rektor 1827. Der Mathematiker war jetzt Chef der Universität, aber seine neue Stellung war keine Sinekure. Unter seiner kompetenten Leitung wurde der gesamte Stab neu organisiert, bessere Männer wurden eingestellt, an Stelle von offizieller Blockade wurden Anweisungen liberalisiert, die Bibliothek wurde auf ein höheres Niveau wissenschaftlichen Bedarfs gebracht, ein mechanisches Seminar wurde organisiert um wissenschaftliche Instrumente zu bauen, die man für die Forschung und Anleitung benötigte, ein Observatorium wurde gegründet und ausgerüstet—ein Steckenpferd des energischen Rektors—und die riesige mineralogische Sammlung, stellvertretend für ganz Russland, wurde in Ordnung gebracht und permanent aufgestockt.

Selbst die neue Würde des Rektorats hielt Lobatschewsky nicht von manueller Arbeit in der Bibliothek und im Museum ab, wenn er spürte, dass seine Hilfe notwendig war. Die Universität war sein Leben und er liebte sie. Auf den geringsten Anreiz legte er seinen Kragen und Mantel ab und ging an die Arbeit. Einmal forderte ein bedeutender Ausländer, der den mantellosen Rektor für einen Hausmeister oder Arbeiter hielt, ihn auf, ihn durch die Sammlungen der Bibliothek und des Museums zu führen. Lobatchewsky zeigte ihm die kostbarsten Schätze, erklärte während er zeigte. Der Besucher war fasziniert und sehr beeindruckt durch die überlegene Intelligenz und Höflichkeit dieses zuvorkommenden russischen Arbeiters. Als er seinen Führer verließ bot er ihm ein stattliches Trinkgeld. Lobatschewsky erstarrte, zur Fassungslosigkeit des Fremden, in stiller Wut und lehnte die angebotenen Münzen beleidigt ab. Da er dachte, dies sein nur eine weitere Marotte seines anspruchsvollen russischen Hausmeisters, verbeugte sich der Besucher und steckte sein Geld wieder ein. An diesem Abend traf er Lobatschewsky an der Tafel des Gouverneurs, wo Entschuldigungen aufgeboten und von beiden Seiten angenommen wurden.

Lobatschewsky vertraute sehr auf die Philosophie, dass um etwas zur eigenen Zufriedenheit zu erledigen, man es entweder selbst tun muss oder über die Ausführung so viel verstehen, um die Arbeit anderer intelligent und schöpferisch zu bemäkeln. Als die Regierung beschloss, die Gebäude zu modernisieren und neue zu bauen, machte es sich Lobatschewsky zur Aufgabe, zu überprüfen dass die Arbeiten ordentlich ausgeführt und die Fertigstellung nicht verzögert wurde. Um sich selbst für diese Aufgabe vorzubereiten, lernte er Architektur. Seine Beherrschung dieses Fachs war derart zweckmäßig, dass die Gebäude nicht nur ansehnlich und angemessen für ihren Zweck waren, sondern, was in der Geschichte von Regierungsgebäuden nahezu einzigartig sein muss, sie wurden für weniger Geld gebaut als genehmigt worden war. Einige Jahre später (1842) zerstörte ein katastrophales Feuer halb Kasan und damit Lobatschewskys schönste Gebäude, einschließlich des kaum fertigen Observatoriums—seinem größten Stolz. Aber dank seiner schwungvollen Gelassenheit wurden die Geräte und die Bibliothek verschont. Nach dem Feuer machte er sich unverzüglich an den Wiederaufbau. Zwei Jahre später war keine Spur der Katastrophe mehr vorhanden.

Wie erinnern uns, dass 1842, das Jahr des Feuers ebenso das Jahr war in dem, dank der gute Geschäftsführung von Gauss, Lobatschewsky zum ausländischen Korrespondenten der Königlichen Gesellschaft in Göttingen gewählt wurde, für seine Schöpfung der nicht-Euklidischen Geometrie. Auch wenn es unglaublich erscheint, dass ein Mann, der so ausschweifend mit Lehre und Verwaltung belastet war wie Lobatschewsky, noch die Zeit hatte, auch nur eine mittelmäßige wissenschaftliche Arbeit zu leisten, hatte er es genau genommen irgendwie geschafft eins der größten Meisterwerke der Mathematik zu schaffen und einen Meilenstein des menschlichen Denkens. Er hatte mit Unterbrechungen seit zwanzig Jahren oder mehr gearbeitet. Seine erste öffentliche Bekanntmachung zu dem Thema, an die Physikalisch-Mathematische Gesellschaft in Kasan, fand 1826 statt. Er hätte auch in der Mitte der Sahara-Wüste sprechen können, bei dem Gehör das er fand. Gauss hörte von der Arbeit nicht vor 1840.

Ein weiteres Kapitel aus Lobatschewskys emsigen Leben zeigt, dass er seiner Zeit nicht nur mathematisch weit voraus war. Das Russland von 1830 war wahrscheinlich nicht hygienischer als ein Jahrhundert später, und man darf annehmen, dass dieselbe

Missachtung persönlicher Hygiene, die deutsche Soldaten im Weltkrieg vor Ekel gegenüber ihren unglücklichen russischen Gefangenen in Erstaunen versetzte, und die heute dafür sorgt, dass das industrielle Proletariat öffentliche Parkanlagen und Spielplätze in Moskau als zahlreiche und bequeme Latrinen benutzt, die Bewohner von Kasan zu Lobatschewskys Zeit unterschied, als die Choleraepidemie sie nur allzu bereit für einen verlängerten Besuch vorfand. Die Erregertheorie der Krankheit lag 1830 noch in der Zukunft, auch wenn fortschrittliche Geister schon lange den Verdacht hegten, dass dreckige Angewohnheiten mehr mit der Geißel der Seuche zu tun hatten, als der Zorn Gottes.

Bei der Ankunft der Cholera in Kasan taten die Priester was sie konnten für ihre geplagten Leute, trieben sie in die Kirchen für das gemeinsame Gebet, Seligsprechung der Sterbenden und Beerdigung der Toten, aber nicht einmal kamen sie darauf, dass eine Schaufel zu etwas anderem nützen könnte als Gräber zu schaufeln. Als er erkannte, dass die Lage in der Stadt hoffnungslos war, regte Lobatschewsky seine Fakultät an, dass die Familien zur Universität gebracht wurden und bewegte einige Studenten dazu—praktisch ordnete er es an—dass sie sich ihm einem rationalen, menschlichen Kampf gegen die Cholera anschlossen. Die Fenster blieben verschlossen, strenge hygienische Regeln wurden erlassen, und nur die nötigsten Ausflüge zur Auffüllung der Nahrungsvorräte wurden erlaubt. Von 660 Männern, Frauen und Kindern, die gesund derart beschützt wurden, starben nur sechzehn, eine Sterblichkeit von weniger als 2,5 Prozent. Verglichen mit den Verlusten unter traditionellen Verfahren in der Stadt, war das überschaubar.

Man könnte sich vorstellen, dass nach all seinen unterschiedlichen Leistungen für das Land und seine europäische Anerkennung als Mathematiker, Lobatschewsky für beträchtliche Ehrungen durch seine Regierung in Frage kommen würde. So etwas auch nur im Ansatz zu denken wäre nicht nur ausgesprochen naiv, sondern stünde auch im Widerspruch zur biblischen Anweisung „Vertraue deinem Fürsten nicht." Als Belohnung für alle seine Opfer und seine unerschütterliche Treue für das Gute in Russland, wurde Lobatschewsky 1846 kurz angebunden seiner Professur und seines Rektorats an der Universität enthoben. Keine Erklärung dieser einzigartigen und unverdienten doppelten Kränkung wurde öffentlich. Lobatschewsky war vierundfünfzig, körperlich und geistig lebendig wie immer und eifriger denn je darauf aus, seine mathematische Forschung fortzusetzen. Seine Kollegen protestierten geschlossen gegen diesen Frevel, riskierten ihre eigene Sicherheit, wurden aber kurz angebunden informiert, dass sie als bloße Professoren verfassungsrechtlich außerstande seien, die höheren Geheimnisse der Wissenschaft einer Regierung zu verstehen.

Die unverhüllte Dankbarkeit brach Lobatschewsky. Ihm wurde weiterhin gestattet sein Studierzimmer an der Universität zu behalten. Als jedoch sein Nachfolger, der von der Regierung sorgfältig ausgewählt wurde, 1847 eintraf um seine undankbare Aufgabe aufzunehmen, gab Lobatschewsky alle Hoffnungen auf, an der Universität jemals wieder etwas zu gelten, die ihren intellektuellen Ruf fast nur seinen Bemühungen verdankte, und er erschien danach nur noch gelegentlich um bei Untersuchungen zu helfen. Obwohl sein Augenlicht rasch schlechter wurde, war er immer noch zu hochgradigem mathematischen Denken in der Lage.

Er liebte die Universität nach wie vor. Seine Gesundheit ging drauf als ein Sohn starb, aber er hielt aus, in der Hoffnung noch von irgendeinem Nutzen zu sein. 1855 feierte die Universität ihren fünfzigjährigen Geburtstag. Um dem Ereignis zu huldigen erschien Lobatschewsky persönlich um eine Abschrift seiner Pangeometrie vorzustellen, der kompletten Arbeit seines wissenschaftliche Lebens. Dieses Werk (auf Französisch und Russisch) hatte er nicht selbst geschrieben, sondern diktiert, da Lobatschewsky jetzt blind war. Ein paar Monate darauf starb er, am 24. Februar 1856, im Alter von zweiundsechzig.

Um zu verstehen was Lobatschewsky getan hat, müssen wir zunächst einen Blick auf Euklids herausragende Leistung werfen. Der Name Euklid war bis vor Kurzem gleichbedeutend mit Grundschulgeometrie. Von dem Mann selbst weiß man wenig mehr als seine zweifelhaften Lebensdaten, 330 – 275. v. Chr. Neben einer systematischen Aufzählung der grundlegenden Geometrie, enthalten seine Elemente alles was zu seiner Zeit über die Zahlentheorie bekannt war. Geometrischer Unterricht wurde 2200 Jahre von Euklid dominiert. Sein Anteil an den Elementen scheint grundsätzlich der eines Koordinators und logischen Kompositeurs der zerstreuten Ergebnisse seiner Vorgänger und Zeitgenossen gewesen zu sein, und sein Ziel war es eine kohärente, rationale Erzählung der grundlegenden Geometrie zu liefern, sodass jede Behauptung in dem ganzen langen Buch zu ihren Postulaten zurück verfolgt werden konnte. Euklid erreichte dieses Ideal nicht oder näherte sich ihm auch nur entfernt an, obwohl man jahrhundertelang annahm, das er es tat.

Euklids Anspruch auf Unsterblichkeit basiert auf etwas ganz anderem als der angenommenen logischen Perfektion, die man ihm manchmal irrtümlich zuschreibt. Es ist seine Erkenntnis, dass das fünfte seiner Postulate (sein Axiom XI) eine reine Annahme ist. Das fünfte Postulat kann in vielen entsprechenden Formen formuliert werden, von denen jedes von einem der anderen abgeleitet werden kann, durch Mittel der verbleibenden Postulate von Euklids Geometrie. Das vielleicht einfachste dieser äquivalenten Behauptungen ist das folgende: Nimmt man eine gerade Linie l und einen Punkt P an, der nicht auf l liegt, dann ist es möglich auf der Fläche, die von l und P bestimmt wird, genau eine gerade Linie l' durch P zu zeichnen, sodass l' nie auf l trifft, egal wie weit man l' und l verlängert (in jegliche Richtung). Lediglich als nominelle Definition sagen wir, dass zwei gerade Linien auf einer Fläche, die sich niemals treffen, parallel sind.

P

l

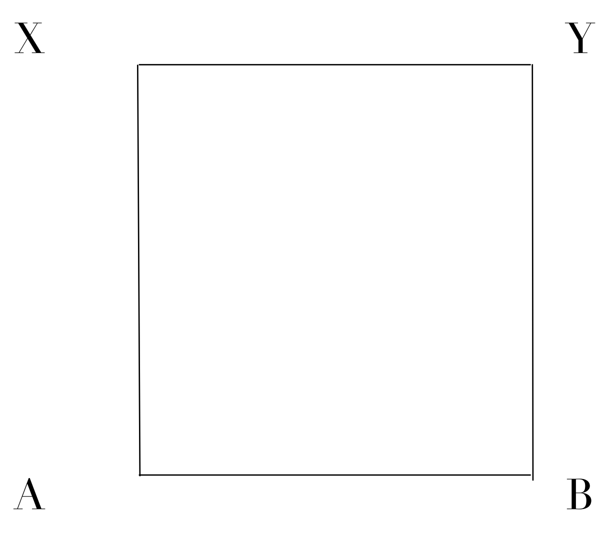
l'

Folglich behauptet das fünfte Postulat von Euklid dass durch P genau eine gerade Linie parallel zu l verläuft. Euklids durchdringende Einsicht in die Natur der Geometrie vergewisserte ihn, dass dieses Postulat zu seiner Zeit nicht von anderen abgeleitet war, obwohl es viele Versuche gegeben hatte, das Postulat zu beweisen. Unfähig das Postulat von seinen anderen Annahmen abzuleiten, und weil er es für die Beweise seiner vielen anderen Theoreme benutzen wollte, stellte Euklid es zusammen mit seinen anderen Postulaten offen auf.

Es gibt noch eine oder zwei Angelegenheiten zu regeln, bevor wir zu Lobatschewskis Kopernikanischen Anteil an der Erweiterung der Geometrie kommen. Wir haben auf die

„äquivalente“ der Parallelen-Postulate hingewiesen. Eins davon, „die Hypothese des rechten Winkels“, wie es genannt wird, stellt zwei Möglichkeiten vor, keins von beiden entspricht Euklids Annahme, eins davon führt in Lobatschewkys Geometrie ein, das andere in Riemanns.

Betrachte eine Figur AXYB, die aussieht wie ein Rechteck, bestehend aus vier geraden Linien, AX, XY, YB, BA, wobei BA (or AB) die Basis ist, AX und YB (oder BY) sind gleich auf und senkrecht zu AB, und auf der gleichen Seite wie AB. Wichtig im Kopf zu behalten ist bei dieser Abbildung, dass jeder der Winkel XAB, YBA, (an der Basis) ein rechter Winkel ist, und dass die Seiten AX, BY die gleiche Länge haben. Ohne das Parallelen-Postulat zu benutzen kann bewiesen werden, dass die Winkel AXY, BYX gleich sind, aber ohne das Postulat zu benutzen ist es unmöglich zu beweisen, dass AXY, BYX rechte Winkel sind, auch wenn sie so aussehen. Wenn wir das Parallelen-Postulat annehmen können wir beweisen, dass AXY, BYX rechte Winkel sind, und umgekehrt, wenn wir annehmen, dass AXY, BYX rechte Winkel sind, können wir das Parallelen-Postulat beweisen. Somit ist die Annahme, dass AXY, BYX rechte Winkel sind äquivalent zum Parallelen-Postulat. Diese Annahme wird heute die Hypothese des rechten Winkels genannt (da beide Winkel rechte Winkel sind wird der Singular statt des Plurals „Winkel“ benutzt).



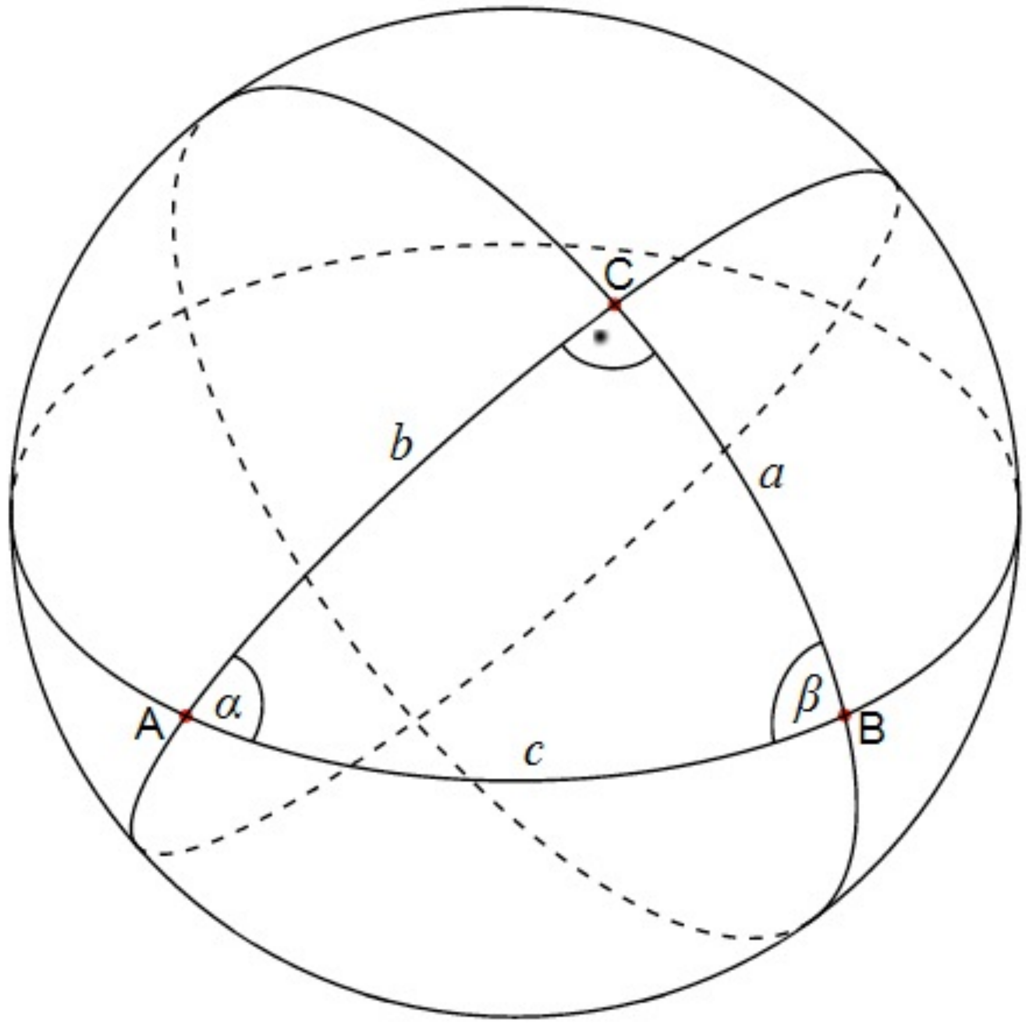
Es ist bekannt, dass die Hypothese des rechten Winkels zu einer einheitlichen, sinnvoll benutzbaren Geometrie führt, und eigentlich zur modernisierten Euklidischen Theorie, die moderne Standards logischer Stringenz einhält. Aber die Abbildung deutet auf zwei andere Möglichkeiten hin: jeder der gleichen Winkel AXY, BYX ist weniger als ein rechter Winkel—die Hypothese des spitzen Winkels; jeder der gleichen Winkel ist größer als ein rechter Winkel—die Hypothese des stumpfen Winkels. Da jeder Winkel einer, und nur einer der Anforderungen entsprechen kann, dass er gleich, kleiner, oder größer als ein rechter Winkel ist; erschöpfen die drei Hypothesen—des rechten Winkels, des spitzen Winkels und des stumpfen Winkels—die Möglichkeiten.

Alltägliche Erfahrung macht uns anfällig für die erste Hypothese. Um zu verstehen, dass die beiden anderen nicht so unrational sind wie es auf den ersten Blick aussieht, müssen wir etwas berücksichtigen, das näher an der menschlichen Erfahrung liegt als die sehr idealisierte „Fläche", auf die Euklid seine gezeichneten Abbildungen projizierte. Aber zunächst beobachten wir, dass weder die Hypothese des spitzen noch die des stumpfen Winkels uns in die Lage versetzt Euklids Parallelenpostulat zu beweisen, denn, wie bereits oben festgestellt wurde, ist Euklids Postulat äquivalent zu der Hypothese des rechten Winkels (im Sinne der austauschbare Ableitbarkeit; die Hypothese vom rechten Winkel ist sowohl notwendig und ausreichend für die Ableitung des Parallelen-Postulats). Falls wir deshalb erfolgreich sind mit der Erstellung einer Geometrie aufgrund einer der beiden neuen Hypothesen, werden wir darin keine Parallelen im Sinne Euklids finden.

Um die anderen Hypothesen weniger unrational zu machen als sie zunächst aussehen, stellen wir uns vor, die Erde sei eine perfekte Kugel (ohne Unregelmäßigkeiten wegen Bergen, usw.). Eine Fläche durch das Zentrum dieser idealen Erde schneidet die Oberfläche in einem großen Kreis. Angenommen wir wollen von einem Punkt A zu einem anderen B auf der Oberfläche der Erde, und bleiben immer auf der Oberfläche auf dem Weg von A nach B, und angenommen wir wollen die Reise auf dem kürzest möglichen Weg machen. Das ist das Problem des „großen Kreis-Segelns". Angenommen ein Fläche geht durch A, B und das Zentrum der Erde (es gibt eine, und nur eine derartige Fläche). Diese Fläche schneidet die Oberfläche in einem großen Kreis. Um die kürzeste Reise zu machen gehen wir von A nach B den kürzeren der beiden Bögen des großen Kreises entlang, der sie verbindet. Wenn A, B zufällig an den äußeren Punkten eines Durchmessers liegen, können wir jeden der Bögen nehmen.

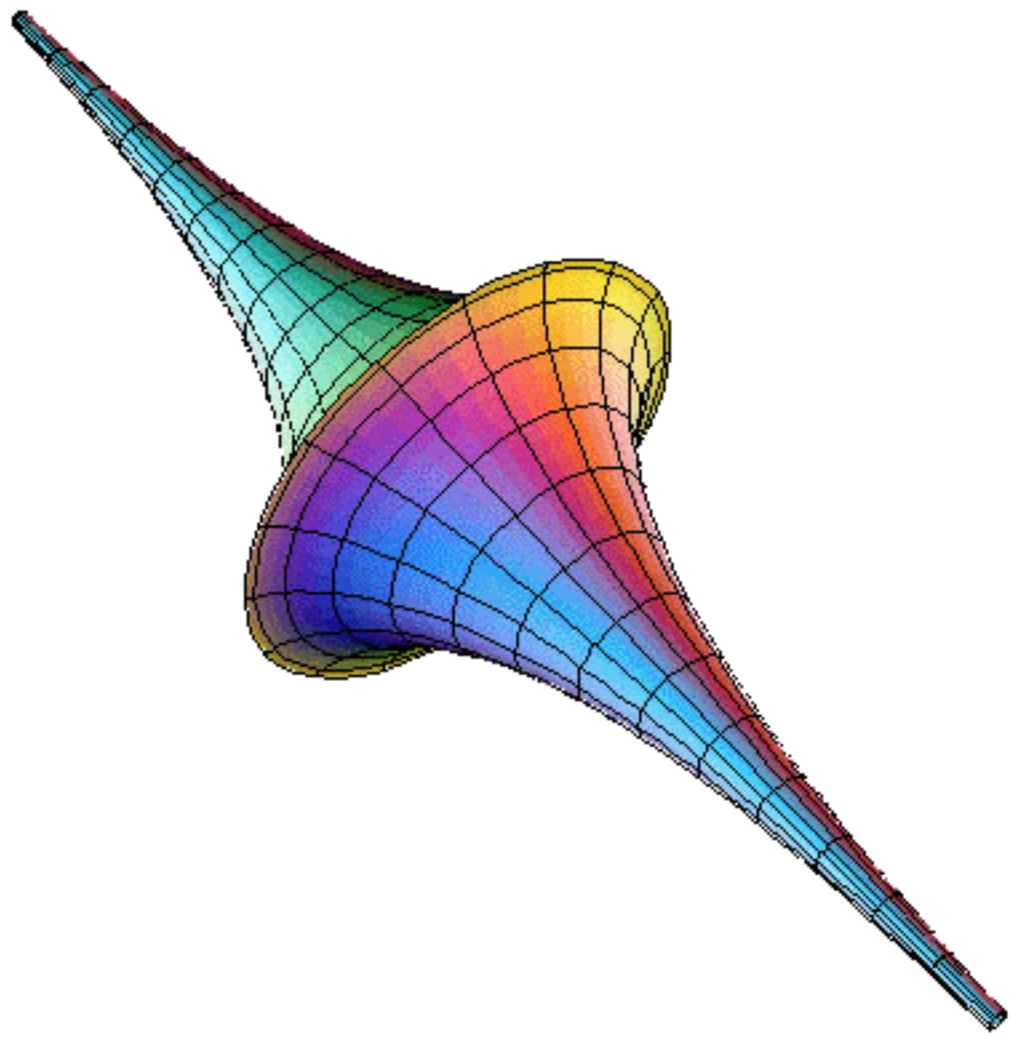
Das vorhergehende Beispiel führt eine wichtige Definition ein, die der Geodäsie auf einer Oberfläche, die jetzt erklärt wird. Man hat gerade gesehen, dass die kürzeste Entfernung auf einer Kugel, die Distanz selbst auf der Kugel vermessen, ein Bogen auf dem großen Kreis ist, der sie verbindet. Man hat ebenso gesehen, dass die längste Distanz der Verbindung der beiden Punkte auf dem anderen Bogen des selben Kreises ist, außer in dem Fall wenn die Punkte die Enden eines Durchmessers sind, wenn die beiden gleich lang sind. Im Kapitel über Fermat wurden „am größten" und „am kleinsten" zusammengefasst unter den geläufigen Namen „Extrem" oder Extremum". Wir entsinnen uns nun der gewöhnlichen Definition eines gradlinigen Segments, das zwei Punkte auf einer Fläche verbindet—„die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten." Übertragen wir das auf die Kugel, sagen wir dass die gerade Linie auf der Fläche dem großen Kreis(bogen) auf der Kugel entspricht. Da das griechische Wort für Erde ist die erste Silbe ge (γη) von geodätisch ist, nennen wir alle Extrema die zwei Punkte auf irgendeiner Fläche verbinden die Geodäsie dieser Oberfläche. Daher sind die Geodäsien auf einer Fläche Euklids gerade Linien; auf einer Kugel sind es große Kreise. Eine Geodäsie kann durch eine Schnur veranschaulicht werden, die man so eng wie möglich zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche spannt.

Nun, zumindest bei der Navigation, denkt man sich den Ozean nicht als flache Oberfläche (euklidisch flach), selbst wenn es um eine bescheidene Entfernung geht; man nimmt sie als das was sie annähernd ist, und zwar ein Teil einer Oberfläche auf einer Kugel, und die Geometrie des Großen-Kreis-Segelns ist nicht die Euklidische. Somit ist die Geometrie des menschlichen Gebrauchs nicht euklidisch. Auf der Fläche treffen sich zwei Geodäsien auf genau einem Punkt, außer sie sind parallel, wenn sie sich nicht treffen (in Euklidischer Geometrie); aber auf der Kugel treffen sich zwei Geodäsien immer auf zwei Punkten. Nochmal, auf einer Fläche können zwei Geodäsien eine Fläche umschließen—wie Euklid in einem seiner Postulate annahm; auf einer Kugel umschließen zwei Geodäsien immer einen Raum.

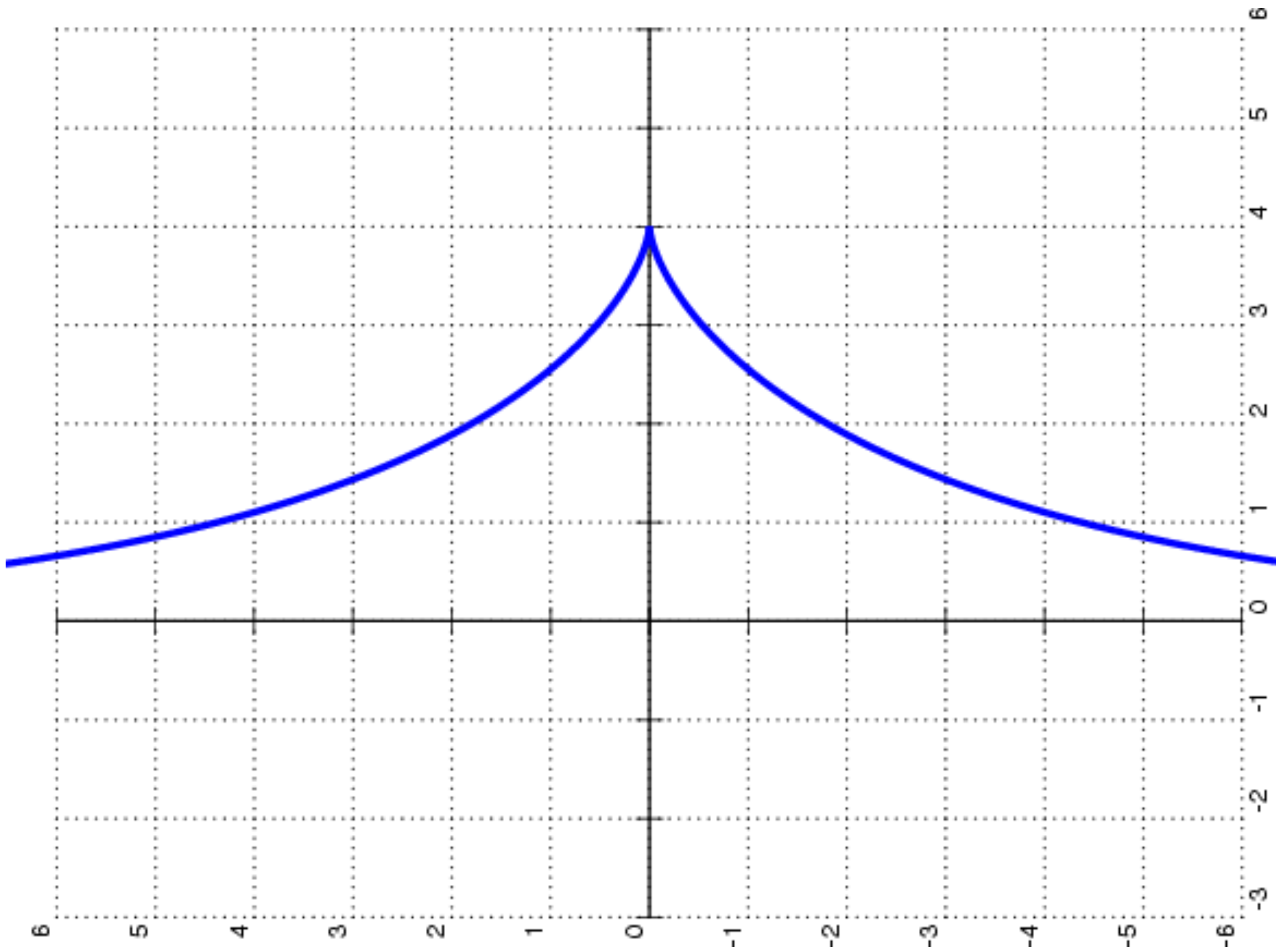


Man stelle sich nun den Äquator auf einer Kugel vor und zwei Geodäsien, die durch den Nordpol senkrecht zum Äquator gezeichnet sind. In der nördlichen Hemisphäre ergibt das ein Dreieck mit gebogenen Seiten, die beide gleich sind. Jede Seite des Dreiecks ist ein geodätischer Bogen. Zeichnet man irgendeinen anderen geodätischen Schnitt, der die beiden gleichen Seiten schneidet, sodass die durchtrennten Teile zwischen dem Äquator und der Schnittlinie gleich sind. Jetzt haben wir, auf der Kugel, eine vierseitige Figur, die dem AXYB entspricht, das wir kurz zuvor auf der Fläche hatten. Die beiden Winkel an der Basis dieser Abbildung sind rechte Winkel und die entsprechenden Seiten sind gleich, wie zuvor, aber jeder der gleichen Winkel bei X, Y ist nun größer als ein rechter Winkel. Darum ist es in der höchst pragmatischen Theorie des Großen-Kreis-Segelns, das näher an der menschlichen Erfahrung ist als die idealisierten Diagramme der Elementargeometrie jemals sein könnten, nicht das Euklidische Postulat, das wahr ist—oder sein Äquivalent in der Hypothese des rechten Winkels—sondern die Geometrie, die sich aus der Hypothese des stumpfen Winkels ergibt.

Betrachtet man auf ähnliche Art und Weise eine wenige bekannte Oberfläche, kann man die Hypothese des spitzen Winkels plausibel machen. Die Oberfläche sieht wie zwei unendlich lange Trompeten aus, die an ihren größten Enden zusammengelötet sind. Um es treffender zu beschreiben, müssen wir den flächigen Bogen einführen, die Traktix,



die man wie folgt erzeugt. Lass zwei Linien XOX', YOY' in eine horizontale Fläche gezogen werden, die sich in rechten Winkeln in O treffen, wie in der Cartesianischen Geometrie. Stell dir ein dehnbares Gewebe entlang YOY' vor, an dessen Ende ein kleines schweres Kügelchen angebracht ist; das andere Ende des Gewebes ist bei O. Zieh dieses Ende entlang der Linie OX.

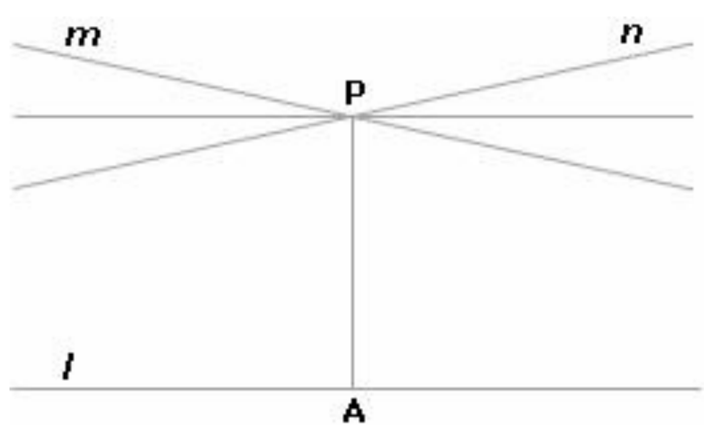


Wenn das kleine Kügelchen kommt, zieht es die eine Hälfte der Traktix heraus; die andere Hälfte wird umrissen, indem das das Ende des Gewebes entlang OX' gezogen wird, und ist selbstverständlich nur eine Spiegelung oder ein Abbild von OY', der ersten Hälfte.Das Herausziehen soll unendlich weitergehen— „unendlich" — auf jeden Fall. Nun stelle man sich vor, die Traktix dreht sich um die Linie XOX'. Die Oberfläche der doppelten Trompete entsteht; aus Gründen, auf die wir hier nicht weiter eingehen müssen (sie hat permanent negative Krümmung) nennt man sie Pseudogewölbe. Wenn auf die Oberfläche die Abbildung mit den zwei gleichen Seiten und den zwei rechten Winkeln gezeichnet wird, mit Geodäsien, ist die Hypothese vom rechten Winkel bestätigt.

Daher gelten die Hypothese vom rechten Winkel, vom stumpfen bzw. vom spitzen Winkel auf der Euklidischen Fläche; eine Kugel, ein Pseudogewölbe und auf jeden Fall „gerade Linien" sind Geodäsien oder Extrema. Euklidische Geometrie ist eine begrenzte, oder degenerierte Behandlung der Geometrie auf einer Kugel, zu der man kommt, wenn der Radius der Kugel gegen Unendlich strebt.

Statt eine Geometrie zu erstellen, die an eine Erde angepasst ist, wie sie Menschen nun kennen, scheint Euklid nach der Annahme verfahren zu sein, dass die Erde flach ist. Hatte Euklid das nicht getan, waren es seine Vorgänger und zu der Zeit, als ihn die Theorie des „Raums", oder Geometrie, erreichte, hatten seine nüchternen Annahmen, die er in seine Postulate eingebaut hatte, bereits die Form abgetragener und unveränderlicher Wahrheiten angenommen, die der Menschheit von einer höheren Intelligenz als der wahrhafte Kern der materiellen Dinge offenbart wurde. Es dauerte mehr als zweitausend Jahre um die ewige Wahrheit aus der Geometrie zu klopfen, und Lobatschewsky tat es.

Lobatschewsky stellte einen Lehrsatz in Frage, um Einsteins Satz zu gebrauchen. Jeder, der eine „Angenommene Wahrheit" in Frage stellt, die notwendig erschien oder von der großen Mehrheit seit 2000 Jahren oder länger als plausibel betrachtet wurde, nimmt seinen wissenschaftlichen Ruf, oder sein Leben, in seine eigenen Hände. Einstein selbst stellte den Lehrsatz in Frage, dass zwei Geschehnisse an verschiedenen Orten zur gleichen Zeit passieren können, und indem er diese ergraute Annahme analysierte, führte sie ihn zur speziellen Theorie der Relativität. Lobatschewsky stellte infrage, dass die Annahme von Euklids Parallelenpostulat, oder, was äquivalent ist, die Hypothese vom rechten Winkel, notwendig ist für eine einheitliche Geometrie, und er unterstützte seine Infragestellung durch die Erstellung eines geometrischen Systems auf der Basis der Hypothese des spitzen Winkels, in dem es nicht eine Parallele durch einen fixen Punkt zu



einer gegebenen geraden Linie gibt, sondern zwei. Keine von Lobatschewskys Parallelen traf die Linie zu der beide parallel verlaufen, noch tut es irgendeine Linie durch den fixen Punkt, die innerhalb des Winkels liegt, die die beiden Linien bilden. Diese scheinbar seltsame Situation ergibt sich aus den Geodäsien auf einem Pseudogewölbe.

Für alltägliche Gegenstände (Messungen von Distanzen, usw.) ist der Unterschied zwischen der Geometrie Euklids und Lobatschewsky zu klein um zu zählen, aber das ist nicht der wichtige Punkt: Jede ist widerspruchsfrei und jede ist hinreichend für menschliche Erfahrung. Lobatschewsky beseitigte die notwendige Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Seine Geometrie war die erste von mehreren, die seine Nachfolger erschufen. Einige dieser Ersätze für Euklids Geometrie—zum Beispiel die Riemannsche Geometrie der generellen Relativität—sind heute mindestens so wichtig in den überlebenden und wachsenden Abteilungen der physikalischen Wissenschaft wie Euklids es war, und ist, in der vergleichenden Statistik und klassischen Bereichen. Zu einigen Zwecken ist Euklids Geometrie am besten oder zumindest ausreichend, für andere ist sie unpassend und eine nicht-euklidische Geometrie ist erforderlich.

Euklid wurde mit seinem System der Geometrie im gewissen Sinne 2200 Jahre lang als der Entdecker einer absoluten Wahrheit oder einer notwendigen Methode der menschlichen Wahrnehmung verehrt. Lobatschewskys Werk war die pragmatische Demonstration des Irrtums dieses Glaubens. Die Verwegenheit dieser Anfechtung und ihr erfolgreiches Ergebnis hat Mathematiker und Wissenschaftler allgemein beflügelt, ander "Lehrsätze" oder anerkannte Wahrheiten zu hinterfragen, zum Beispiel das „Gesetz" der Sterblichkeit, die seit Jahrhunderten für unverfälschtes Denken als notwendig galten, wie Euklids Postulate, bevor Lobatschewsky sie verwarf.

Die ganze Wirkung der Methode Lobatschewskys Lehrsätze zu hinterfragen muss vielleicht erst wahrgenommen werden. Es ist keine Übertreibung Lobatschewsky den Kopernikus der Geometrie zu nennen, denn Geometrie ist nur einTeil eines größeren Bereichs den er sanierte; man könnte ihn passend auch als den Kopernikus des gesamten Denkens bezeichnen.

Übersetzung: Thorsten Ramin